www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR **ANNEE 1989**

EPREUVE DE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES *(Durée : 1 h 30 - Cœfficient : 3)*

Le problème a pour objet l'étude d'une courbe intégrale d'une certaine équation différentielle.

Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction des démonstrations.

Les candidats pourront traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes.

---=oOo=---

. Soit l'équation différentielle (E) $y' = e^y - x$.

. On se propose d'étudier la courbe intégrale de (E), notée C, qui passe par le point A de coordonnées (0,1).

1.)

a) Montrer que $2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$. (On pourra considérer $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ et effectuer le changement de variables des coordonnées polaires).

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2.) Etudier brièvement les variations sur $\mathbb{R}$ de $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}dt$.

Montrer que l'équation $\varphi(x) = \frac{1}{e}$ possède une racine α et une seule, et vérifier que $\alpha \in]0\ ;\ 1[$.

3.)

a) Montrer que : $\forall x \in]0\ ;\ 1[$,

$$\begin{cases} x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \\ -x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} < -\varphi(x) < -x + \frac{x^3}{6} \end{cases}$$

(On pourra écrire les développements en série entière de sin x et de $\varphi(x)$, puis utiliser la majoration du reste d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers zéro en décroissant).

b) En déduire que : $\forall x \in]0\ ;\ 1[$, $\left|\sin x - \int_0^x e^{-t^2/2}dt\right| < \frac{1}{40}\,x^5$.

T.S.V.P.

4.) On donne $\beta = \text{Arc sin } \frac{1}{e} = 0{,}3765 \pm 5.10^{-4}$.

a) Montrer que $|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| < \frac{1}{40}\ \beta^5$.

b) En déduire qu'il existe $\xi \in]\alpha,\beta[$ tel que $|\alpha-\beta| < \frac{1}{40}\ \beta^5\ e^{\xi^2/2}$.

c) En déduire un majorant de $|\alpha-\beta|$ et une valeur approchée de α avec une erreur absolue n'excédant pas 10^{-3}.

5.) On rappelle que C désigne la courbe intégrale de l'équation différentielle

(E) $y' = e^y - x$

qui contient le point A de coordonnées (0,1).

En effectuant le changement de fonction inconnue $z = e^{-y}$, ramener l'équation (E) à une équation linéaire et intégrer.

6.)

a) Montrer que la courbe C est représentée par

$$y = f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = -\frac{x^2}{2} - \text{Log}\left(\frac{1}{e} - \int_0^x e^{-t^2/2}\ dt\right)$$

(f(x) vérifiant l'équation (E)).

b) Montrer que f est définie sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$ et que sur cet intervalle on a $f'(x) = \exp(f(x)) - x$.

En déduire que $f'(0) = e$ et que $\forall\ x \in]-\infty\ ;\ 0[\quad f'(x) > 0$.

7.) On veut montrer que f' ne prend que des valeurs strictement positives sur $[0\ ;\ \alpha[$. Posons : $A = \{x \in]0\ ;\ \alpha[\ /\ \forall y \in]0\ ;\ x]\ ,\ f'(y) > 0\}$.

a) Montrer que A possède une borne supérieure γ.

b) On raisonne par l'absurde et on suppose donc $\gamma < \alpha$.

Montrer que $\forall\ y \in]0\ ;\ \gamma]\quad f'(y) \geqslant 0$.

En déduire que $\exp f(\gamma) \geqslant \exp f(0) = e > \gamma$.

En déduire $f'(\gamma) > 0$ et aboutir à une contradiction.

8.) Montrer que C admet une asymptote et une parabole asymptote.

Déterminer et construire le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales de (E).

Construire C.

-oOo-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail